De Principio Integrationis Functionum Differentialium, Unius Quantitatis Variabilis, Algebraicæ.

Disquisitio Mathematica,

Quam,

Consent. Ampliss. Ord. Philos. Lundens.

P. P.

P. S. MUNCK AF ROSENSCHÖLD,

Phys. Adj. Ord.

Respondente

SVENONE PETRO NILSSON,

Smolando.

In Acad. Carol. Die XXIX Nov. MDCCCXLIII.

P. III.

LUNDÆ,

typis Berlingianis,

MDCCCXLIII.

Theses Respondentis.

I.

Grammaticæ prius, quam Mathesi, studendum pueris esse contendimus.

II.

Id spectat omnis cogitationum humanarum agitatio, ut res dissolutæ divulsæque conglutinentur et ratione quadam constringantur.

Si non est $m=n$, non erit Q constans, et v per æquationem nuper allatam determinari non potest. Sin autem est $n=1$, factor ipsius v' erit simplicior et æquatio nostra mutatur in

$$v+\frac{a+bx}{(p+1)b}v'=\frac{x^{m-1}}{(p+1)b}$$

Quoniam jam est $P'=\frac{1}{p+1}$, atque adeo constans, ex iis quæ antea dicta sunt apparet, per differentiationem successivam hujus æquationis tandem æquationem oriri, in qua est membrum dexterum constans, modo sit $m-1$ numerus integer positivus.

Ut hoc exemplo illustretur, sit $dy=x^2(a+bx)^p dx$. Quoniam jam est $m-1=2$, æquatio nostra erit:

$$v+\frac{a+bx}{(p+1)b}v'=\frac{x^2}{(p+1)b}$$

Ut per hanc æquationem æquatio secunda $v'+P_1v''=Q_1$ determinetur, observamus esse $P=\frac{a+bx}{(p+1)b}$, $P'=\frac{1}{p+1}$, $P'+1=\frac{p+2}{p+1}$, $Q=\frac{x^2}{(p+1)b}$, $Q'=\frac{2x}{(p+1)b}$. His valoribus substitutis obtinetur $\frac{P}{P'+1}=P_1=\frac{a+bx}{(p+2)b}$ et $\frac{Q'}{P'+1}=Q_1=\frac{2x}{(p+2)b}$, unde

$$v'+\frac{a+bx}{(p+2)b}v''=\frac{2x}{(p+2)b}$$

Quoniam membrum dexterum æquationis nondum est constans, necesse est æquationem tertiam $v''+P_2v'''=Q_2$ quærere. Ad hanc obtinendam observandum est esse

$$P_1'=\frac{1}{p+2},\quad P_1'+1=\frac{p+3}{p+2},\quad Q_1'=\frac{2}{(p+2)b}.$$

Porro erit $\frac{P_1}{P_1'+1} = P_2 = \frac{a+bx}{(p+3)b}$, et
$\frac{Q'_1}{P'_1+1} = Q_2 = \frac{2}{(p+3)b}$, unde æquatio provenit

$$v''' + \frac{a+bx}{(p+3)b} v'''' = \frac{2}{(p+3)b}.$$

Quoniam jam est Q_2 constans, concludi potest esse $v'' = Q_2 = \frac{2}{(p+3)b}$. Cognito hoc modo v'', per substitutionem in æquationibus antecedentibus v' et v determinari possunt. Brevius tamen idem modo sequenti efficitur. Quoniam est $dv' = v''dx$, necesse est ut sit $v' = \int v''dx$. Est autem $v'' = \frac{2}{(p+3)b}$, et hinc facile deducitur $v' = \int \frac{2dx}{(p+3)b} = \frac{2x}{(p+3)b} + C''$. Ut constans C'' determinetur, observamus esse $\int \frac{2dx}{(p+3)b} = v' = C''$ si $x = 0$.

Quando autem ponimus $x=0$, ex æquatione secunda obtinetur $v' = -\frac{a}{(p+2)b} v''$ $= - \frac{2a}{(p+2)(p+3)b^2}$, unde apparet esse $v' = \frac{2x}{(p+3)b} - \frac{2a}{(p+2)(p+3)b^2}$.

Simili modo erit $v = \int v'dx = \frac{x^2}{(p+3)b} - \frac{2ax}{(p+2)(p+3)b^2} + C'$.

Ut constans C' determinetur, observandum est esse $v = C'$, si $x = 0$. Quando autem est $x=0$, ex æquatione prima, introducto valore ipsius v', obtinetur

$v = \frac{2a^2}{(p+1)(p+2)(p+3)b^3} = C'$. Hinc concludimus esse

$$v = \frac{x^2}{(p+3)b} - \frac{2ax}{(p+2)(p+3)b^2} + \frac{2a^2}{(p+1)(p+2)(p+3)b^3}$$

$$=\frac{(p+1)(p+2)b^2x^2-2(p+1)abx+2a^2}{(p+1)(p+2)(p+3)b^3}.$$

Cum autem sit $n=1$, erit $u=(a+bx)^{p+1}$, unde concludimus esse

$$\int x^2(a+bx)^p dx=\frac{[(p+1)(p+2)b^2x^2-2(p+1)abx+2a^2](a+bx)^{p+1}}{(p+1)(p+2)(p+3)b^3}+C.$$

Excipiuntur tamen casus quando $p=-1$, $p=-2$ et $p=-3$; tunc enim erit v infinitum et integrale algebraice exprimi non potest.

Ex iis quæ nuper allata sunt difficile non esset formulam generalem, ex qua $\int x^r(a+bx)^p dx$ integrari posset, siquidem r numerum integrum positivum significat, construere. Cum autem hæc omnia jam diu sint nota, sufficiant quæ allata sunt, ex quibus methodi integritatem ante oculos posuimus.

Calculus jam allatus tamtummodo applicationem habet, si est $n=1$. Data autem formula generali $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$, difficile non est hanc in aliam transformare, ubi huic conditioni satisfit. Sufficit ponere $x=z^{\frac{1}{n}}$, unde $x^n=z$, $x^{m-1}=z^{\frac{m-1}{n}}$ et $dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$. Substitutis his valoribus, erit $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx=\frac{z^{\frac{m}{n}-1}}{n}(a+bz)^p dz$. Jam ex iis quæ nuper exposuimus patet, binomium sub hac forma esse algebraice integrabile, quotiescumque est $\frac{m}{n}$ numerus integer positivus.

Si in formula $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$ dividitur intra uncinos per x^n, hæc accipit formam $x^{m+np-1}(ax^{-n}+b)^p dx$. Jam si n in $-n$ et m in $m+np$ mutamus, perspicuum est binomium methodo quam sequimur integrari posse, quotiescumque est $-\frac{m}{n}-p$ numerus integer positivus. Duæ igitur existunt

conditiones, quibus expletis functio $x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$ methodo nuper allata integrari potest.

Observandum tamen est, v interdum infinitum fieri. Facile enim apparet, denominatorem integralis in formula generali esse $(p+1)(p+2)\ldots\ldots\ldots(p+i-1)(p+i)$, si significat i numerum integrum per divisionem ispius m per n ortum. Quotiescumque igitur p hos valores habebit, -1, -2 $-3,\ldots\ldots-i+1$, $-i$, $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx$ algebraice exprimi non potest.

Ut jam investigemus, an aliæ existant conditiones integrabilitatis binomii, præter duas jam diu cognitas, necesse est formam factoris u variare. Ponimus igitur

$$u=(x^r+a')(a+bx^n)^{p+1}$$

Pro primo observamus necesse non esse x^r factore quodam constanti multiplicare. Nam si factor rationalis ipsius u hanc formam haberet (Ax^r+B), per A intra uncinos diviso, provenit $A\left(x^r+\frac{B}{A}\right)$. Cum autem jam A totum factorem multiplicat, et insuper constans est, omnino negligi potest. Per differentiationem obtinetur $u'=$
$[rax^{r-1}+rbx^{r+n-1}+n(p+1)bx^{r+n-1}+n(p+1)a'bx^{n-1}](a+bx^n)^p=$
$[b(r+n(p+1))x^{r+n-1}+rax^{r-1}+n(p+1)a'bx^{n-1}](a+bx^n)^p$.

Est autem ut antea $y'=x^{m-1}(a+bx^n)^p$. Jam igitur valores $\frac{u}{u'}$ et $\frac{y'}{u'}$ determinare possumus, et his in æquatione $v+Pv'=Q$ substitutis, obtinetur

$$v+\frac{x(x^r+a')(a+bx^n)}{b(r+n(p+1))x^{r+n}+rax^r+n(p+1)a'bx^n}v'=$$
$$\frac{x^m}{b(r+n(p+1))x^{r+n}+rax^r+n(p+1)a'bx^n}.$$